

# El Método de la Ruptura

César Becerra Campos

Asesor:  
Dr. Andreas Wachtel

2 de diciembre de 2021

## 1 ¿Qué es el Método de la Ruptura?

## 2 ¿Cómo funciona?

- Intuición en general
- Siguiendo curvas de nivel
- Decidiendo qué hacer

## 3 Resultados y comentarios

## 1 ¿Qué es el Método de la Ruptura?

## 2 ¿Cómo funciona?

- Intuición en general
- Siguiendo curvas de nivel
- Decidiendo qué hacer

## 3 Resultados y comentarios

¿Qué es el Método de la Ruptura?

- Un método de optimización numérica

¿Qué es el Método de la Ruptura?

- Un método de optimización numérica
- Implementado para funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

## ¿Qué es el Método de la Ruptura?

- Un método de optimización numérica
- Implementado para funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- Con un punto de partida  $\vec{x}_0$  estima, potencialmente, todos los mínimos locales

## 1 ¿Qué es el Método de la Ruptura?

## 2 ¿Cómo funciona?

- Intuición en general
- Siguiendo curvas de nivel
- Decidiendo qué hacer

## 3 Resultados y comentarios

## 1 ¿Qué es el Método de la Ruptura?

## 2 ¿Cómo funciona?

- Intuición en general
- Siguiendo curvas de nivel
- Decidiendo qué hacer

## 3 Resultados y comentarios



- Conjunto de Nivel:  $\ell_f(\vec{x}_0) = \{\vec{x} : f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$
- Curva de Nivel: Una parte conexa de  $\ell_f(\vec{x}_0)$

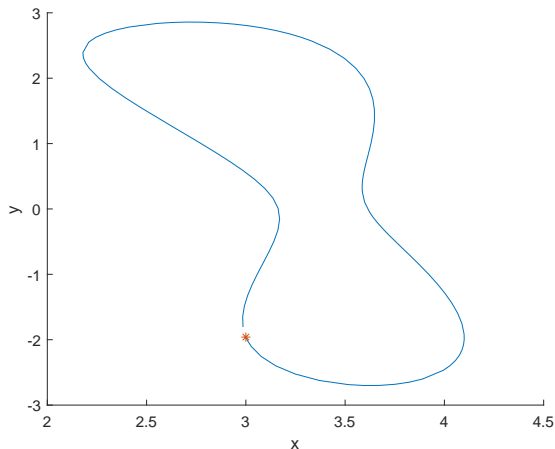


Figura: Función de Himmelblau:  $\vec{x}_0 = (3, -2)$

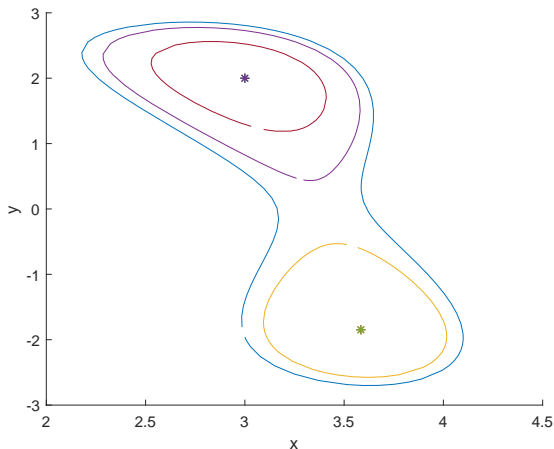


Figura: Función de Himmelblau:  $\vec{x}_0 = (3, -2)$

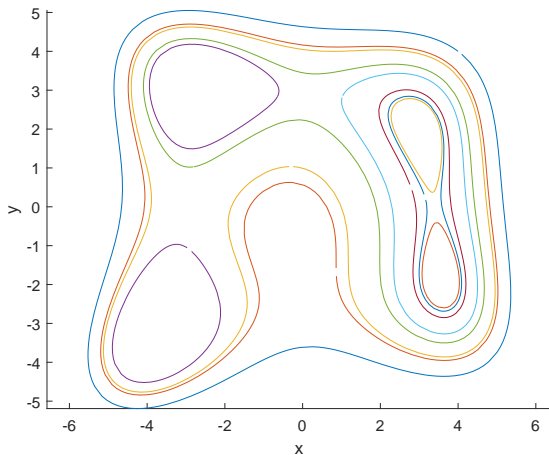


Figura: Función de Himmelblau:  $\vec{x}_0 = (4, 4)$

## 1 ¿Qué es el Método de la Ruptura?

## 2 ¿Cómo funciona?

- Intuición en general
- Siguiendo curvas de nivel
- Decidiendo qué hacer

## 3 Resultados y comentarios

## Requisitos:

Introducir un parámetro de tiempo,  $t$ . Así,  $\Phi(t) = (x(t), y(t))$  es la parametrización de la curva de nivel.

Encontrar una EDO que siga la curva.

Aplicar un método numérico que siga la EDO

Sabemos que  $\nabla f(\vec{x})$  y la curva de nivel son perpendiculares.

Calculamos  $\nabla f(\vec{x})$  de manera exacta o con diferencias finitas.

Multiplicamos por  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  para girar  $90^\circ$

Así,  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla f(\vec{x})$ , es la EDO que necesitamos para seguir la curva de nivel.

Definimos  $H(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla f(\vec{x})$ , y tenemos el siguiente PVI:

PVI en cada paso:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{H(\vec{x})}{\max\{1, \|\nabla f(\vec{x}(t_i))\|\}}$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}(t_i)$$



# ¿Cómo seguir esa EDO?

- RK4
- Trapecio Explícito
- ¡Muchos más!

## 1 ¿Qué es el Método de la Ruptura?

## 2 ¿Cómo funciona?

- Intuición en general
- Siguiendo curvas de nivel
- Decidiendo qué hacer

## 3 Resultados y comentarios

Para medir la curvatura...

$\theta_i$  es el ángulo de  $\nabla f(\vec{x}_i)$  respecto al eje  $x$ .

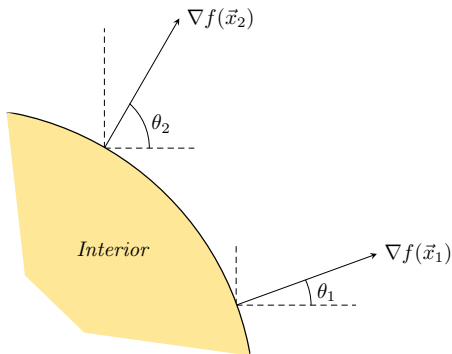


Figura: Midiendo la Curvatura

Tres opciones:

- Donde  $\theta' > 0$ , la curva de nivel es convexa (bien inflada).

Tres opciones:

- Donde  $\theta' > 0$ , la curva de nivel es convexa (bien inflada).
- Donde  $\theta' < 0$ , la curva de nivel es cóncava (hundida hacia adentro).

Tres opciones:

- Donde  $\theta' > 0$ , la curva de nivel es convexa (bien inflada).
- Donde  $\theta' < 0$ , la curva de nivel es cóncava (hundida hacia adentro).
- Donde  $\theta' = 0$ , la curva de nivel es una línea recta.

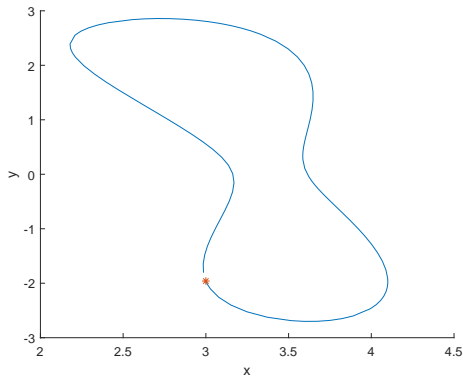
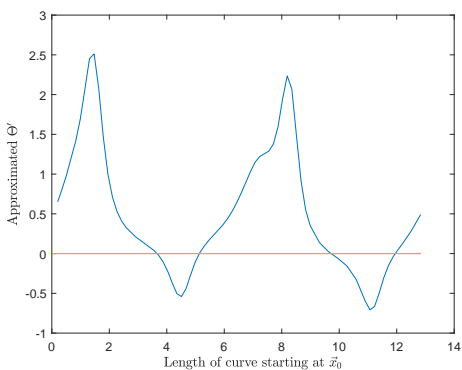


Figura: Una Curva de Nivel y su medida  $\theta'$

Def: Picos negativos

Para una curva de nivel  $M_{\vec{x}_0}$ , los *Picos Negativos* son aquellos puntos  $\vec{x}_i$  donde  $\theta'_i$  alcanza un mínimo

Si dos Picos Negativos están cerca, creamos una *ruptura*.



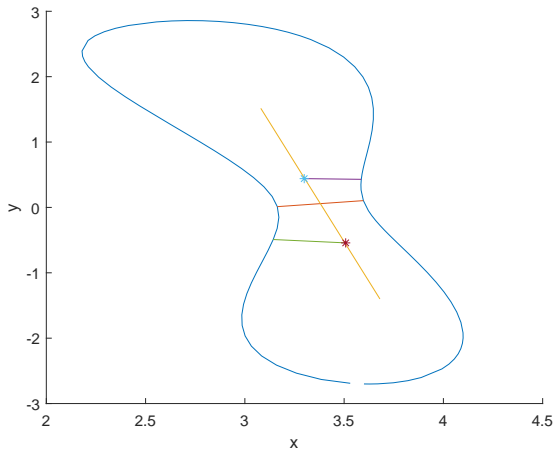


Figura: Ruptura

## Convexidad Global

Si  $\theta'_i > 0$  para toda  $i$ , entonces la curva de nivel es *globalmente convexa*.

Si una curva de nivel es globalmente convexa, entonces:

¿Está cerca de un mínimo?

Método de Newton

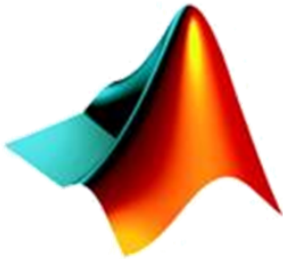
¿Está lejos?

Bajar el Nivel

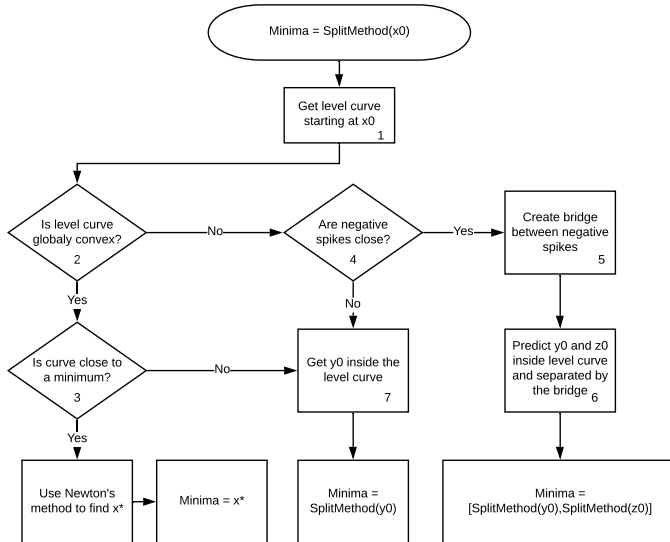
Sea  $L$  la longitud de la curva. Luego, tomamos:

$$\vec{y}_0 = \vec{x}_i - kL \frac{\nabla f(\vec{x})}{\|\nabla f(\vec{x})\|}$$

Aquí,  $k$  es un parámetro que representa la proporción de  $L$  a avanzar.



# MATLAB®



## 1 ¿Qué es el Método de la Ruptura?

## 2 ¿Cómo funciona?

- Intuición en general
- Siguiendo curvas de nivel
- Decidiendo qué hacer

## 3 Resultados y comentarios

Cuadro: Función de Himmelblau:  $\vec{x}_0 = (4, 4)$

Minimos	Minimos estimados	Error
(3.0,2.0)	(3.0000..., 1.9999...)	1.7117 e-12
(-2.805118, 3.131312)	(-2.805118..., 3.131312...)	5.3283 e-07
(-3.779310, -3.283186)	(-3.779310..., -3.283185...)	2.5449 e-07
(3.584428, -1.848126)	(3.584428..., -1.848126...)	6.2730 e-07

Cuadro: Método de la ruptura aplicado a diferentes funciones

Función	$\vec{x}_0$	Minimos estimados	Error
Styblinski -Tang	(4,4)	(-2.9035,-2.9035)	3.9274e-08
Easom	(1.6,1.6)	(3.1415,3.1415)	1.7796e-11
Booth	(0,10)	(0.9999,2.9999)	1.0422e-09
White & Holst	(0,0)	(0.9999,0.9999)	4.2564e-11



- El método requiere funciones suaves y con curvas de nivel cerradas.

- El método requiere funciones suaves y con curvas de nivel cerradas.
- Aproxima bien los mínimos, aunque algunos parámetros deben ser ajustados para cada función  $f$ .

- El método requiere funciones suaves y con curvas de nivel cerradas.
- Aproxima bien los mínimos, aunque algunos parámetros deben ser ajustados para cada función  $f$ .
- Tener información parcial sobre el conjunto de nivel ha sido un problema constante.

- 1 Amir Beck, *Introduction to Nonlinear Optimization - Theory, Algorithms and Applications* MOS-SIAM series on Optimization. SIAM, 2014.
- 2 Andrei Neculai, *An Unconstrained Optimization Test Function Collection* Advanced Modeling and Optimization, Vol. 10, number 1, 2008.
- 3 Jorge Nocedal and Stephen Wright, *Numerical Optimization*. New York: Springer, 2006.